Jak szybko liczyć VaR dla całego portfela?

Dr inż. Krzysztof Urbanowicz

Portfel P składa się z instrumentów N, czyli wartość portfela w czasie t to:

$$P_t = \sum_{i=1}^{N} p_i * x_t \qquad (1)$$

gdzie x_t to cena instrumentu i w chwili t, a p to liczba instrumentów w portfelu.

Ryzyko portfela wg Markovitz'a to:

$$Risk_p = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \sigma_i^2 \qquad (2)$$

gdzie σ_i to standardowe odchylenie historycznych danych instrumentu i.
Powyższe równanie można w przybliżeniu zamienić na następujące:

$$Risk_p = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_{y_i} y_i^2 \, dy_i \qquad (3)$$

gdzie f_{y_i} jest rozkładem prawdopodobieństwa zwrotów cen y instrumentu i. Wartość poddana ryzyku (Value at Risk), w skrócie VaR, jest następująca:

$$VaR_p = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \int_{-\infty}^{-\beta_i} f_{y_i} y_i^2 \, dy_i \qquad (4)$$

Wartość $\frac{\beta_i}{\sigma_i}$ jest taka sama dla wszystkich instrumentów, jeśli zwroty cen tych instrumentów są niezależne od siebie. W przeciwnym przypadku poziomy odcięcia cen β_i wyliczamy z macierzy kowariancji.

Załóżmy rozkład t-Studenta ze stopniami swobody α_i dla zwrotów cen instrumentów i.
Rozkład t-Studenta jest następujący:

$$P_\alpha(y) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\alpha\pi}\,\Gamma(\alpha/2)\left(1+\frac{y^2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \qquad (5)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \qquad (6)$$

Stopnie swobody α liczymy metodą Maximum Liklihood Method.

W dalszej dyskusji wykorzystamy wartość obiektywną (ref [1]). Dla rozkładu t-Studenta jest ona następująca:

$$w(y)=\frac{\delta+1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{\delta}\right) \tag{7}$$

Wyliczamy średnią wartość w: <w> dla każdego instrumentu. Wartość obiektywna dla rozkładu Normalnego jest wariancją, więc możemy użyć tablic dla rozkładu normalnego, by wyliczyć δ. Tablicę można znaleźć tu http://www.statystyka-zadania.pl/tablica-rozkladu-normalnego/ . Robimy to tak, że dla VaR 5%, mamy β = 1.65 σ. Czyli zależność między <w> a β to:

$$\beta=1.65\sqrt{\langle w\rangle} \tag{8}$$

Średnią wartość <w> liczymy następująco:

$$\langle w_i\rangle=\sum_{j=0}^{t}\frac{\alpha_i+1}{2}\ln\left(1+\frac{y_{i,j}^2}{\alpha_i}\right) \tag{9}$$

gdzie i to numer instrumentu, a j czas.

Musimy jeszcze uwzględnić korelacje między zwrotami instrumentów finansowych. W publikacji [1] jest opisane jak liczyć macierz kowariancji uwzględniając wartość obiektywną.

Następnie podstawiamy do wzoru (8) i liczymy macierz stopni swobody **β. W**yliczamy wartości własne i wektory własne dla macierzy **β**, używając Singular Value Decomposition. Mamy już wektory, które są niezależne w przestrzeni i możemy użyć równania (4). Pod średnie <w> wstawiamy wartości własne wyliczone z macierzy kowariancji.
Ostateczny wzór na VaR dla portfela to:

$$VaR_p=\sum_{i=1}^{K}\int_{-\infty}^{-1.65*v_i} f_{y_i} y_i^2\, dy_i \tag{11}$$

gdzie v_i to wartość własna macierzy kowariancji, K liczby istotnych wartości własnych macierzy kowariancji, a f_{y_i} bierzemy z równania (5).

Bibliografia:

[1] K. Urbanowicz, P. Richmond and J.A. Hołyst, Risk evaluation with enhanced covariance matrix, Physica A , doi:10.1016/j.physa.2007.05.034, (2007).